Die Eulerrolle, Kurzbeschreibung

Autor:	Hanspeter Zehnder
Version	080822
Inhalt:	1. Was ist die Eulerrolle und wozu wurde sie entwickelt? 2. Mechanischer Aufbau der Eulerrolle 3. Der Bezug zum Einheitskreis und zum Zeit- und Bildbereich. 4. Zahlen auf der Manteloberfläche der Eulerrolle
Besonderheit:	Die Eulerrolle ist ein patentiertes Produkt von Zehnder Bildungsprojekte Anwendungsbereich: Didaktisches Model für den Mathematikunterricht

1. Was ist die Eulerrolle und wozu wurde sie entwickelt?

Wer sich in ein Flugzeug oder in einen Zug setzt, verlässt sich darauf, dass alles ordnungsgemäss funktioniert. Das setzt nebst verlässlicher Technik auch verlässliche Mitarbeiter voraus, welche im Beförderungsprozess involviert sind. Menschen lassen sich ablenken oder sie können getäuscht werden, was zu Fehlhandlungen führen kann. Kommt es aus so einer Fehlhandlung zu einem Unfall, spricht man von menschlichem Versagen, der Hauptursache von Unfällen. Solche Unfälle lassen sich durch klare Prozessabläufe reduzieren, setzt aber voraus, dass sie auch eingehalten werden.

Das verlässliche Einhalten von Prozessvorschriften gehört aber nicht zu den menschlichen Stärken, viel besser in dieser Disziplin sind Automaten und Computer. Dies wird auch durch empirische Untersuchungen bestätigt. Bei repetitiven Aufgaben ist die menschliche Fehlerquote etwa 10^{-3} *(Eine Abweichung pro tausend qualifizierte Handlungen)* und sie ist weitgehend unabhängig vom Bildungsstand. Sichere Computersysteme sind diesbezüglich deutlich besser, ihre Fehlerquote liegt bei etwa 10^{-9}, wobei diese Werte besondere Systemarchitekturen voraussetzen.

Wer also sicher unterwegs sein möchte, sollte darauf vertrauen können, dass Prozesse automatisiert sind. Ist das nicht der Fall, geht der öV-Benutzer ein erhöhtes Risiko ein. Diese Frage erübrigt sich aber schon fast, da die meisten Transportunternehmen die Automatisierung des Fahrbetriebes schon längst umgesetzt haben. Trotzdem: Der Transportbereich ist nicht unfallfrei und schon gar nicht störungsfrei geworden. Was läuft da also falsch?

Die Auseinandersetzung mit dieser Frage aus dem Bahnprozess bildet den Ursprung dieser Arbeit.

Sollte für den Bahnprozess einfach eine Null-Toleranz gefordert werden? Dass eine solche Forderung sehr grosse Investitionen auslöst ist nachvollziehbar, aber wenn damit Leben gerettet werden kann, wäre das vermutlich vertretbar. Die Forderung nach einem «fehlerfreien Prozess» ist aber nebst einer politischen, auch eine rationelle Frage: Kann diese Forderung überhaupt erfüllt werden und wenn nein, warum nicht?

Bereits in der ersten Phase dieser Arbeit wurde erkannt, dass die Frage zur Nulltoleranz im Zusammenhang zu einem bekannten Primzahlen-Rätsel stehen muss. Damit sind wir bei Grundsatzfragen zur Zahlentheorie, welche nur bedingt im Bereich der betrieblichen Bildung liegen. Diese Erkenntnisse zeigen jedoch, dass die grosse Herausforderung nicht in der Lösung komplexer mathematischer Funktionen liegt, sondern in fehlendem Grundlagenwissen über Prozesse und Funktionen. Das sind Funktionen die oft angewendet werden, obwohl sie im Detail oft nicht genau verstanden werden. Dazu gehören scheinbar triviale Fragen wie «was ist eine Zahl» oder weshalb ist der Wurzelwert von 1 = -1? *(Es gibt keine andere Zahl, bei welcher der Wurzelwert ein negatives Vorzeichen aufweist).*

Ein wesentlicher Meilenstein dieses Projekts ist daher die Entwicklung der **Eulerrolle**.

Diese zylinderförmige Rolle ist ein mathematisches Hilfsmittel, mit dem einfache Zahlenzusammenhänge leicht verständlich dargestellt werden können. Am ehesten kann dieses Hilfsmittel mit einem 3D-Rechenschieber verglichen werden, nur sind konventionelle Rechenschieber im PC-Zeitalter nicht mehr populär.

Grundsatzidee der Eulerrolle:

In der Mathematik kennt man verschiedene Zahlendarstellungsarten. So kann zum Beispiel eine Geschwindigkeit mit einem Vektor dargestellt werden, wobei die Vektorlänge die Geschwindigkeit und der Vektorpfeil die Fahrrichtung anzeigen kann. Ein solcher Vektor kann auf zwei Arten visualisiert werden.

Variante a) Vektordarstellung in einem Polarsystem.
Vektorspitze wird in einer xy-Ebene durch Länge und Phasenwert definiert.

Variante b) Vektordarstellung in kathesischer Schreibweise.
Vektorspitze wird durch einen x- und y-Anteil definiert.

Die Variante a eignet sich für die Abbildung von dynamischen Prozessen (Schwingungslehre) und Variante b für räumliche Darstellungen (Geometrie).

Die beiden Darstellungsarten unterscheiden sich auch dadurch, dass gewisse mathematische Operationen in einer Variante wesentlich einfacher lösbar sind als in der anderen Variante.

Für den Praktiker ist es daher wichtig, dass für mathematische Fragestellungen die geeignete Darstellungsart gewählt wird. Ist das nicht der Fall, kann es kompliziert werden.

In der **Polardarstellung** *(Variante a)* kann ein Vektor als drehender Zeiger dargestellt werden.

Der Einheitskreis ist ein Beispiel einer solchen Darstellung, bei der gilt: $\varphi = f(t)$.

Das heisst, dem Vektor $R1\angle 2\pi$ wird eine Länge «1» und ein Phasenwert 2π bzw. eine Drehzeit 2π zugeordnet. Diese Darstellung wird auch als «Zeitbereich» bezeichnet.

Vorteil dieser Darstellung: Multiplikation und Divisionen können mit einfachen Vektordrehungen realisiert werden, Additionen sind komplizierter.

Im Gegensatz dazu kann die **kartesische Darstellung** als Bildbereich bezeichnet werden, für den gilt: $y = f(x)$. Hier kann dem y-Wert eine Vektorlänge und x-Wert ein Phasenwert bzw. eine Bogenlänge zugeordnet werden.

In dieser Darstellung können Additionen einfach dargestellt werden und Multiplikationen sind komplizierter.

Je nach Fragestellung lohnt es sich daher, eine Funktion von der einen Darstellung in die andere zu transformieren.

In der NMR-Spektroskopie *(nuclear magnetic resonance)* wird diese Transformation für die Strukturanalyse von Molekülen verwendet. Dabei wird ein NMR-Signal *(Radiowelle)* in einer Empfangsspule detektiert und gespeichert. Anschliessend kann dieses Zeitsignal in den

Bildbereich transformiert werden. In dieser Darstellung $y = f(x)$ lassen sich Frequenzabweichungen der x-Achse zuordnen was eine Korrelation zur Molekularstruktur ermöglicht. Ein vergleichbares Verfahren wird auch in der MRI-Bildgebung verwendet *(MRI Magnetresonanztomographie)*. Beiden Anwendungen gemeinsam ist, dass die erforderlichen Transformationen vom Zeit- in den Bildbereich anspruchsvoll sind *(2D-Fourier-Transformationen)*.

Mit der Eulerrolle kann diese Transformation mit Drehungen nachgebildet werden, was einen einfacheren Zugang zu verschiedenen mathematischen Zusammenhängen ermöglicht.

Dazu gehören auch Aussagen über Primzahlen sowie zu den Zahlen 1, e und π.

2. Mechanischer Aufbau der Eulerrolle

Die Eulerrolle ist ein zweiteiliger Zylinder, bestehend aus einem Unterteil und verschraubbaren Oberteil.

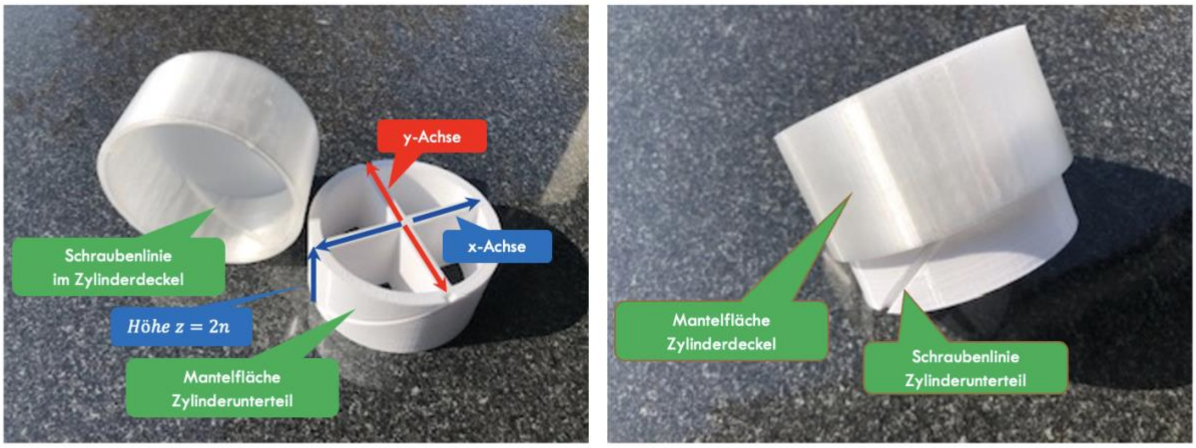

Bild 1: Eulerrolle, bestehend aus Zylinderdeckel und Zylinderunterteil

Beschreibung:

- x-Achse und y-Achse:
  Polarkoordinaten auf der Zylinder-Kreisfläche (Boden, bzw. Decke des Zylinders) Damit könnte auf der kreisförmigen Bodenfläche der Eulerrolle ein Einheitskreis gezeichnet werden. Das setzt voraus, dass der Durchmesser des Einheitskreises mit zwei Längeneinheiten dargestellt werden kann ($D = r_x + r_{-x}$). Anstelle der Radiuslänge $r_x = 1_x$ wird eine Einheit $\mathcal{L}_r$ und anstelle der Radiuslänge $r_{-x} = 1_{-x}$ eine Einheit $\mathcal{L}_z$ eingeführt. Zudem wird für den j-Vektor die Einheit $\mathcal{L}_z$ eingeführt.
  Besonderheit: Die geometrischen Abmessungen der Eulerrolle sind so gewählt, dass auf der Bodenfläche eine Radiuslänge $r = 2$ eingezeichnet werden kann. Das heisst, die Durchmessserlänge der Eulerrolle kann mit 4 Längeneinheiten beschrieben werden ($D = 2\mathcal{L}_r + 2\mathcal{L}_z = 4\mathcal{L}_y$).

- Höhe $z = 2n$ (der Eulerrolle):
  Zylinderunterteil und Zylinderoberteil haben die gleiche Höhe $h = 2n = r = 2$

- Mantelfläche Zylinderoberteil
  Der Zylinderoberteil ist über eine Schraubenlinie mit dem Zylinderoberteil verbunden. Aus Konstruktionsgründen ist der Durchmesser des Oberteils etwas

grösser. Idealisiert besitzt aber das Oberteil die gleichen Abmessungen wir das Unterteil ($D = 2r;\ h = r;\ U = D\pi$).

- Schraubenlinie
  Für die Steigung der Schraubenlinie gilt: $m = \frac{h}{\pi}$

- Skalierung der Eulerrolle
  Jede Durchmesserlänge wird auf den Wert $r = n^0 = 1$ skaliert. Damit kann jede beliebige Zahl auf der Eulerrolle abgebildet werden.

3. Der Bezug zum Einheitskreis und zum Zeit- und Bildbereich.

Die Dimensionierung der Eulerrolle erlaubt eine nicht verzerrte Darstellung der Länge e und π auf der Mantelfläche der beiden Zylinderteile (*Höhe* $h = 2n + 2n$).

Der Gültigkeitsbereich der Eulerrolle wird durch seine Höhe und seinen Umfang beschränkt.
Dabei gilt: maximale Höhe der beiden Mantelflächen: $Höhe\ h = Breite\ b = \pm 2$;
maximale Breite der Mantelflächen: $Umfang\ = Länge\ l = \pm 4\pi$;

Damit kann auf der Mantelfläche der Eulerrolle-eine grössere Zahl abgebildet werden als auf dem Einheitskreis. Die Länge der Mantelfläche wird durch den Kreisumfang $U = 2r\pi = 2n\pi$ beschränkt. In der normalen Polardarstellung ist das nicht der Fall, weil die Kreisumdrehungen pro Sekunde (Frequenz) erst bei sehr hohen Frequenzen eingeschränkt werden.

Bezeichnungen und verwendete Synonyme
Die Darstellung von Vektoren oder Zahlen auf dem Zylinderboden wird im Zusammenhang mit der Eulerrolle als R-Darstellung bezeichnet *(R weil die Radiuslänge eine Konstante ist).*

Im Unterschied zum Begriff «Zeitbereich» ist in der R-Darstellung die Integralgrenze bei ± 2

Die Mantelfläche der Eulerrolle ist zweiteilig und kann als Bildbereich bezeichnet werden.

Der Zylinderunterteil wird dabei als statisches Element interpretiert. Auf dieser Mantelfläche ist somit keine Zeiteinheit darstellbar, dafür aber eine beliebige Vektorlänge n^0 und eine dazu passende Umfanglänge $n^0 2\pi = 2\varphi$. Auf dieser Mantelfläche lässt sich eine Flächenzahl n^2 abbilden.

Weiter gilt: Die skalierte Zylinderhöhe $n^0 =\ 2^0 = 1$ bildet die mathematische Konstante σ ab. Diese Konstante stellt in der Laplace Transformation 50% des Integrals dar-($\int_{-\infty}^{0} f(t)dt$).
Zudem gilt: Bei der Gausskurve wird mit $\sigma = 1$ die Normalverteilung definiert.

Auf der Manteloberfläche des Zylinderoberteils können die anderen 50% der Laplace Transformation dargestellt werden $\int_{0}^{+\infty} f(t)dt$. Dieser Zylinderteil ist nach oben ausdrehbar und damit kann auf der x-Ache (Länge der Mantelfläche) eine Zeiteinheit dargestellt werden und auf der y-Achse eine Höhe h.

Generelle Anmerkung zum Gültigkeitsbereich *(Integrationsgrenze)* der Eulerrolle

Die Höhe des Zylinderunterteils wird immer auf die Länge $n^0 = 1$ skaliert.
In der R-Darstellung kann dieser Wert immer einem jn-Vektor zugordnet werden.
Wird bei diesem Vektor der Phasenwinkel verdoppelt (Multiplikation) dreht sich der Vektor auf die -x Achse. Diese Drehung entspricht einer Multiplikation *2.

Beispiel $4^0 = 1$: j-Vektor mit der Länge $4\mathcal{L}_y$ und einem Phasenwert $\frac{\pi}{2}$; Wertung: Zahl 1
$4^1 = 4$; Vektor der Länge $4\mathcal{L}_y$ und einem Phasenwert 2π; Wertung: Zahl 4

Erkenntnis: Der Phasenwert ist mit der Skalierung $4^0 = 1$ durch 4 teilbar → $\Delta\varphi = 90^0$.

Bei einer Skalierung 8^0=1 verbessert sich nur die Auflösung aber der j-Vektor verlängert sich dadurch nicht.

Unabhängig wie gross n gewählt wird, mit der Skalierung wird jeder beliebige jn-Vektor auf die Länge 1 reduziert. Je grösser jedoch n ist, umso besser wird die Phasenauflösung.
Für die Radiuslänge r=n=2 ist die Phasenauflösung auf 180^0 beschränkt.

Unabhängig von der Auflösung können auf der oberen und unteren Mantelfläche drei Raum- und eine Zeitdimension dargestellt werden. Auf der Eulerrolle kann damit eine Raum-Zeit Einheit dargestellt wird.

Die Darstellung von Zahlen und Vektoren auf der Euler Mantelfläche wird als Z-Darstellung bezeichnet. Im Gegensatz zum Begriff «Phasenraum» gelten für die Z-Darstellung engere Integrationsgrenzen.

Die zweiteilige und verdrehbare Eulerrolle ermöglicht somit nicht nur einen leichteren Zugang zur 4-dimensionalen Raum-Zeit Dimension. Auch Erkenntnisse zu Zahlen höherer Potenz und Aussagen zur Eulerschen Identität werden mit dem Tool «Eulerrolle» leichter verständlich.

Eulersche Identität: $e^{j\pi} - 1 = 0$.
Die Eulersche Identität kann sehr einfach formuliert werden, ihre Interpretation ist aber sehr anspruchsvoll. Sie wurde schon öfters als schönste Formel der Mathematik gewählt.

4. Zahlen auf der Manteloberfläche der Eulerrolle

Damit ein j-Vektor abgebildet werden kann, ist eine minimale Phasenauflösung von 90^0 erforderlich. Der dazu notwendige Kreisumfang muss mindesten eine Länge von 4π aufweisen.

Dieses Produkt kann als R-Vektor mit einem Phasenanteil von $\varphi = \pi$ (Im-Anteil) und einem Additionsanteil D = 4 (Re-Anteil) interpretiert werden.

Real- und Imaginär-Anteil werden mit dem Vektor R2$\angle\frac{\pi}{2}$ beschreiben. (Länge des R2-Vektors: $4\mathcal{L}_y$)

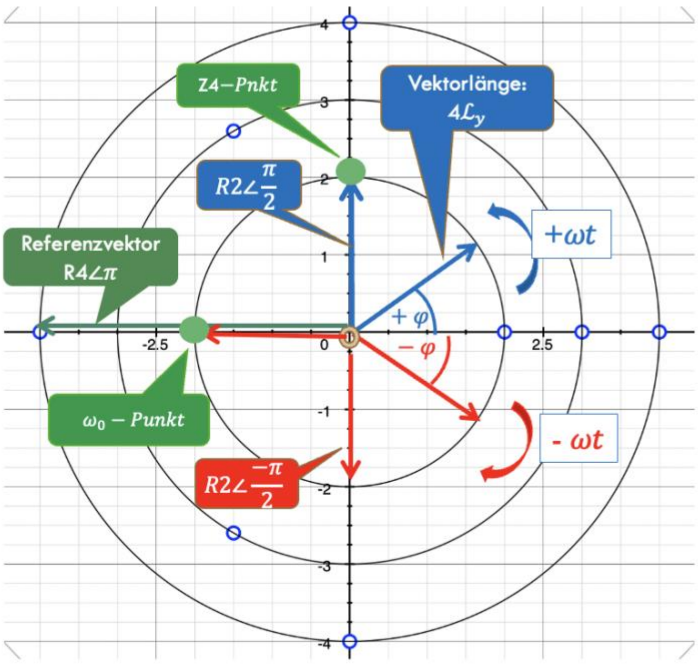

Bild 2: R-Darstellung auf dem Zylinderboden

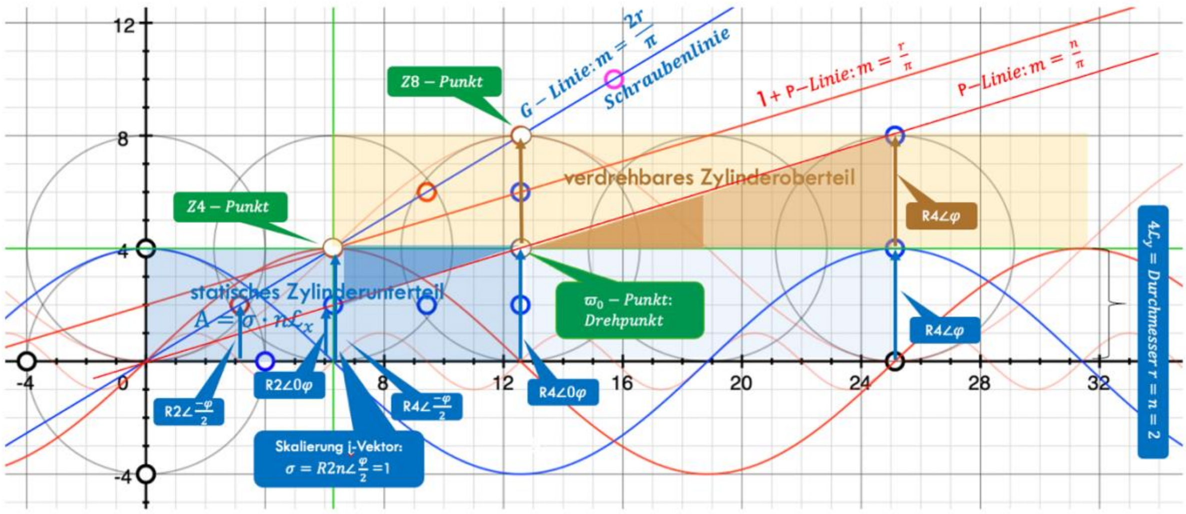

Bild 3: Z-Darstellung mit blauer statischer und brauner dynamischer Mantelfläche.

Die ausgedrehte Mantelfläche ist nur bedingt punktsymmetrisch zum ω_0-Punkt. Würden beide Zylinderteile in Gegenrichtung verdreht werden, wäre das nicht der Fall. Dieses gleichzeitige Verdrehen wird mit eine *Fourier-Transformation* beschreiben. Wird nur am Zylinder-Oberteil gedrht, lässt sich das mit der *Laplace-Transformation* beschreiben. Dieser Unterschied zeigt sich im *Polyerdersatz (E+K-F=2)*. Die Zahl **2** beschreibt den ω_0-Punkt mit seiner yx-Verschiebung. Die Geometrie erfordert diese Verschiebung, weil sie keine negativen Seiten kennt. Solche Zusammenhäng zeigen die breite Anwendung der Eulerrolle als didaktisches Hilfsmittel.

Weiterführende Ausführungen zur Eulerrolle und zu Primzahlen: s. www.bildungsprojekte.ch